設計品質を確率密度関数でコントロールする手法

Method of controlling Design Quality by Probability Density Function

○戸水晴夫（正，SDI Japan，Haruo Tomizu）

1　はじめに

自然界の物理現象にはバラツキが必ず存在する．従って，現実のモノづくりはバラツキがあることを前提に進められる．そして，バラツキの大小がモノとしての品質を表し，そのモノの市場価値を決定するひとつの指標として捉えられてきた．しかし，モノづくりのための設計作業においては，当初からバラツキが考慮されることは少なかったように思われる．現在でも図面に必要最小限の公差を与えるぐらいである．世の中に全く同じように動く２つのシステムが存在しないように，そして，同じように動いたとしても，人間による測定が十分に正確に行えないために，実際のエンジニアリングでは，統計解析が重要な設計品質を確保するための手段になるのである．[1]

筆者は，モノの設計を行う場合は，そのモノの用途や製造方法に基づく確率分布の種類まで予測し，事前に対策することによって，製品となった時の品質がより安定すると考えている．本報では，設計品質を確率分布で捉え，確率密度関数 PDF（Probability Density Function）をサンプルモーメントから導出し，設計品質をコントロールする方法を紹介する．

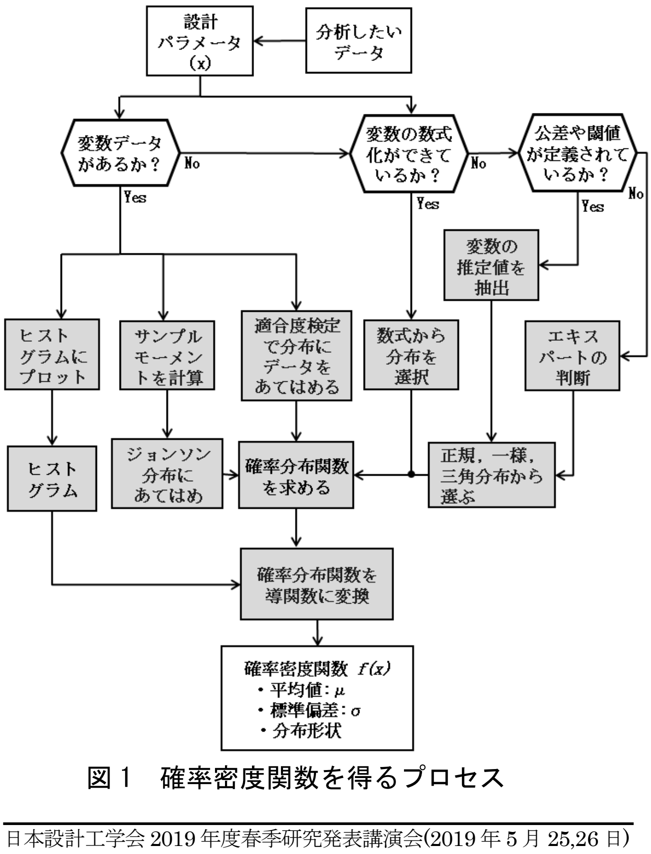


図１　確率密度関数を得るプロセス

2　設計品質を分布から見極める

設計構想段階において，設計仕様に関する一連のデータが提示された場合に，どのような情報が設計パラメータとして「数字の海」に隠されているのかを探索することが，効率的な設計を行う上で重要な作業となる．これは近年のビッグ・データ研究などで盛んに使われているデータ・サイエンスの手法が，設計分野のエンジニアリング手法として利用できることに繋がると考えられる．設計品質を特徴づける確率密度関数を得るプロセスの全体像を**図 1** に示す．

従来の構想設計においては，製品仕様の分布は正規分布すると仮定することが一般的であった．しかし，本当にそれで正しいのだろうか？そのことを確認するために，製造後のバラツキに対して確率分布をあてはめてみよう．そして，それらの分布タイプは，データ解析や統計学，エキスパートの見解から選択される．分布の選び方は次の手順で考える．はじめは，変数データをヒストグラムにすることである．また，分布データのサンプルモーメント値（平均値、標準偏差、歪度、尖度）を計算し，ジョンソン分布にあてはめてみることである．そして，適合度検定を用いて，分布の妥当性を確認することができる．一方，変数の数式化が困難な場合や公差値，閾値が定義できない場合がある．そのような場合は，別の手法で変数の推定値を出すか，あるいはエキスパートの判断に基づいて分布を選ぶことになる．

実は，世の中に存在する製造物の仕様の分布のほとんどが，正規分布にあてはまらないといわれている．**表 1** に世の中に存在する代表的な分布の種類と特徴を示す．[2]実際は正規分布に従うことがないのに，最初から正規分布を想定してモノの設計を行うこと自体に無理があるとは考えられないだろうか.

分布タイプを設計段階で決定する意味を考えるには，ある機能が**図 2** に示すような分布になると分かっていると仮定してみればよい．このような片寄った分布が想定できる場合，設計者は製品のパフォーマンス仕様を，設計段階で顧客クレームが出にくい範囲に設定することができるだろう．そして，製品となった時の想定不良率 PNC（Probability of Non-Compliance）を計算し，はじめからこれらの分布に対応した設計仕様にできるのである．

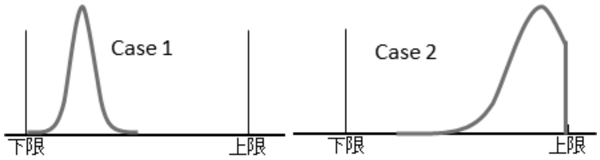
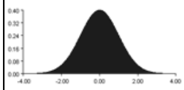
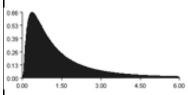
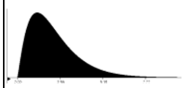
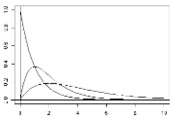
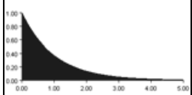
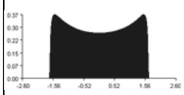
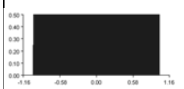
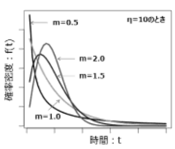
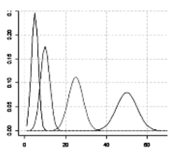
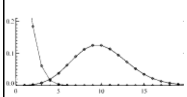
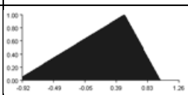


図２　想定された分布のタイプ例

日本設計工学会 2019 年度春季研究発表講演会(2019 年 5 月 25,26 日)

表１　代表的な分布の種類と特徴[2]

分布の種類	分布の特徴	分布の形	分布の数式	実際の例
正規分布	多くの独立した微小な誤差を合計した左右対称な釣り鐘型の分布．バラツキ程度を表すには，標準偏差σを用いる．		$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}$	・電気的ノイズ ・測定誤差 ・全国模試の点数 ・日本の男女別身長
対数正規分布	右に裾の長い非対称分布．標準偏差σは平均値μに比例する．ある変数の対数をとったものが正規分布するとき，もとの変数は対数正規分布に従う．		$f(x)=\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right)}$	・石油や天然ガスの埋蔵量 ・音の強さ ・材料の寿命 ・市町村の人口 ・個人所得額
レイリー分布	位相のランダムな波が多数集まった時の信号の強度（包絡線）の分布．		$f(x)=\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $(x\geq 0)$	・爆弾やミサイルが落下するときの距離 ・マイクロ波無線通信，移動無線通信の受信強度 ・超音波診断装置特性
ガンマ分布	一定の割合で発生する独立した事象の総数の発生に必要となる時間を表すため，形状母数 k，尺度母数θの 2 パラメータで特徴づけられる分布．		$f(x)=\dfrac{1}{\Gamma(k)\theta^k}x^{k-1}e^{-x/\theta}$	・棚卸償却 ・システムの故障時間 ・電子部品の寿命 ・通信の待ち時間 ・所得の分布
指数分布	ランダムに発生する単位時間ごとに生起する事象の数がポアソン分布に従うとき，生起期間の確率を示す分布．		$f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}$ λ=故障率	・故障率一定の場合の部品の平均故障時間 ・地震が起きる間隔 ・電球の寿命 ・メール受信間隔
ベータ分布	特定の期間に制約された物理的現象のランダムなバラツキを柔軟に表現できる分布． a, b は正の実数．		$f(x)=Cx^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $C=\dfrac{1}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}$	・生産の歩留まり ・プロジェクトの工期見積もり ・成功確率の推定
一様分布	特定の期間に全ての値が等しく発生するようなランダムなバラツキを持つ分布．		$f(x)=\begin{cases}1/(b-a) & a\leq x\leq b\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$	・擬似乱数列の発生 ・サイコロを振った時，目の出る確率
ワイブル分布	時間に対する劣化現象や寿命を統計的に記述するため，ワイブル係数 m と尺度パラメータηで記述される分布．		$f(x)=\dfrac{m}{\eta}*\left(\dfrac{x}{\eta}\right)^{m-1}*e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}$	・故障率が一定でない場合の部品の平均故障時間 ・電子管，リレー，ボールベアリングなどの故障時間
二項分布	全ての独立した試行に対して一定の成功確率を設定した場合，結果が成功か失敗のいずれかであるときの n 回の成功数で表される分布．		$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ p= 成功確率 q = 1-p	・部品のサンプル抽出による受入試験 ・サンプリング調査 ・二項検定
ポアソン分布	単位時間あたりに平均 λ 回起こる完全にランダムな現象が、単位時間に x 回起きる確率を表す分布．		$f(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ e=2.71828….	・年間保険金請求数 ・時間当たりに掛かってくる電話数 ・同一部品の欠陥数
三角分布	最小値、最大値、および最頻値によって定義される形状が三角形の分布．		$f(x)=\begin{cases}2(x-a)/((b-a)(c-a)) & a\leq x\leq b\\ 2(c-x)/((c-b)(c-a)) & b\leq x\leq c\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$	・経済のシミュレーション ・建設コスト管理

3　データから確率分布を特定する方法

得られたデータセットから確率分布を推定できる 4 個の統計値が知られている．これら 4 個の統計値は，分布のサンプルモーメントと称されるものである．平均値はデータの中心的な値の傾向を示すものであり，標準偏差は平均値に関する分散を説明する．歪度はデータの対称性や非対称性を表し，尖度は形状またはピークの特性に関連している．これら 4 個の数値を用いて，分布または確率密度関数の性質を説明することができる．はじめに，分析したいデータから平均値および標準偏差を得て，位置および相対分散を決定することができる．さらに，歪度と尖度を計算して，**表 2** に示すような分布のおおよその形を推定することができる．特に，計算で得られた歪度と尖度を既知の分布の歪度と尖度で比較することによって，データセットがどのような分布を持つ母集団からのものであるかを推論することができる．

表 2 の尖度の数値は（3 = 正規分布）のものである．超過尖度（0 = 正規分布）の場合は，表示されている値から 3 を引かなければならない．このような尖度の表現が 2 種類存在することに注意したい．特に，Excel を使って計算する場合では、関数 SKEW と KURT を使用して、それぞれ歪度と尖度を計算できるが，このとき，Excel の KURT 関数は超過尖度を計算し，正規分布に対しては 0 を返す．従って，Excel で通常の尖度の計算結果を表示したい場合は，値に 3 を加算しなければならない．

3.1　第 1，第 2 モーメントの計算

平均値$\bar{x}$とは，確率変数の期待値のことであり，式(1)で表される．確率分布の第 1 モーメントといわれる統計値である．

$$m_1 = \bar{x} = \sum_{i-1}^{n} X_i / n \tag{1}$$

表 2　歪度と尖度と分布の関係

歪度	尖度	分布	
0	1.8	一様分布	
負の値	2.4	三角分布	
0	2.4	三角分布	
正の値	2.4	三角分布	
0	3	正規分布	
0.63	3.26	レイリー分布	
2	9	指数分布	

また，標準偏差σは，分散σ^{2}の平方根で定義される．分散σ^{2}が確率分布の第 2 モーメントといわれる統計値に相当する．式(2)で表される．データがどの程度平均値の周りにばらついているかを示す数値が，分散である．標準偏差とは，データや確率変数の散らばり具合を表す数値である．

$$m_2 = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2}{n} \tag{2}$$

3.2　第 3，第 4 モーメントの計算

歪度とは，確率分布を平均値からみたときの非対称性を表す数値であり，確率分布の第 2 モーメントと第 3 モーメントから計算できる．第 3 モーメントは式(3)で表される．歪度は，b_1 の平方根で表される無次元量である．b_1 の平方根が 0 未満の場合は，分布は負に片寄っていて，平均値の左側が長く伸びる．また，b_1 の平方根が 0 以上の場合は，分布は正に片寄っていて，平均値の右側が長く伸びることを表す．

$$m_3 = \frac{\sum_{i-1}^{n} (X_i - \bar{x})^3}{n} \tag{3}$$

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}} \tag{4}$$

尖度とは，確率分布の尖鋭度を表す数値であり，確率分布の第 2 モーメントと第 4 モーメントから計算できる．第 4 モーメントは式(5)で表される．尖度は，b_2 で表されるピーク値に関する無次元量である．尖度 b_2 が 3 以上の場合は分布が高くなり，$b_2 = 3$ では，分布は正規分布となる．$b_2 = 1.8$ の場合は分布が平坦な一様分布になる．

$$m_4 = \frac{\sum_{i-1}^{n} (X_i - \bar{x})^4}{n} \tag{5}$$

$$b_2 = \frac{m_4}{(m_2)^2} \tag{6}$$

歪度と尖度を分布図で表すと，**図 3** となる．

3.3　適合度検定で分布の信頼性を求める

サンプルモーメントからどのような分布であるかが想定できるならば、そこから適合度の統計量を計算し，データがどれほど想定した分布に収まるかの信頼性レベル（P 値）を計算することができる.一般に次の 3 種類の検定法が用いられる.[3)]

(a) アンダーソン・ダーリング法
(b) カイ二乗適合度検定法
(c) コルモゴロフ・スミルノフ法

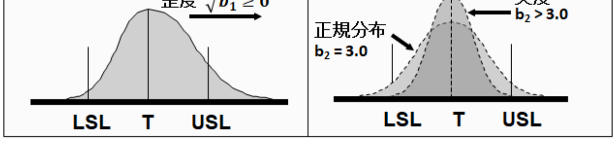


図 3　歪度と尖度の関係

4　ジョンソン分布で分布を特定する方法

分布に関する 4 個のサンプルモーメントが分かっている場合，ジョンソン分布を使って柔軟に分布の形状を表現できる．[4] ジョンソン分布は，いわば万能型の確率密度関数といえる．但し，ジョンソン分布は，変換すると正規分布になる以下の 3 つの分布で構成されている．

Johnson Su 分布：4 個のパラメータによる非拘束の分布．
Johnson S_B 分布：4 個のパラメータによる最小値と最大値で拘束された分布．
Johnson S_L d 分布：3 個のパラメータによる一端拘束の対数分布．

これらの分類は，歪度を横軸に，尖度を縦軸に採ると**図 4** のように表現することができる．

4.1 分布形状を作成するソフトウェアの利用

弊社で開発した Distribution Explorer ツールを利用すれば，ジョンソン分布を使用して容易に分布形状を算出できる．もちろん、ジョンソン分布以外の分布(正規分布，指数分布，対数分布，一様分布，三角分布，ワイブル分布）に対しても形状を描画することができる．このツールは，下記の弊社ホームページから無償でダウンロードできる．**図 5** は，ツールの利用例を示している．

http://www.statdesign-j.com/service.html

使い方は，次の通りである．

(a) Distribution Explorer を開く．
(b) Draw using Johnson Distributions チェックボックスにチェックを入れる．
(c) 尖度（skewness）と歪度（kurtosis）に値を入力する．
(d) Plot ボタンを押す．

ジョンソン分布の種類が自動で選択され，グラフが作成される．また，上限値を越える確率，下限値を下回る確率を計算し，想定不良率（Probability of Non-Compliance）が自動で計算される．

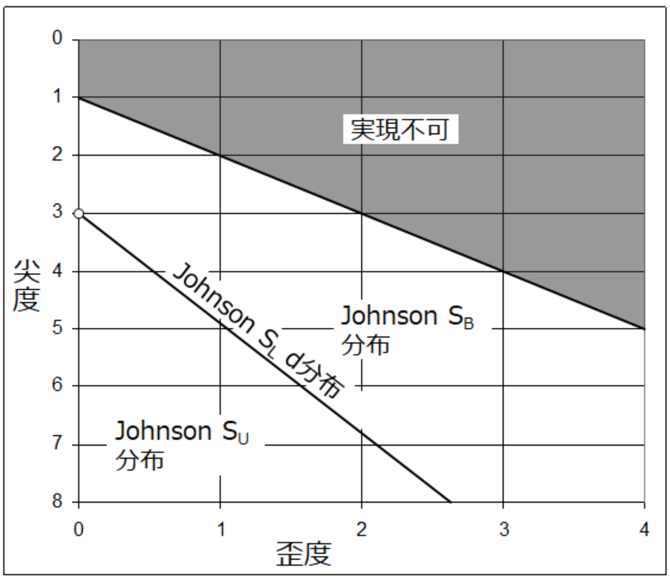


図 4　歪度と尖度で異なるジョンソン分布の種類

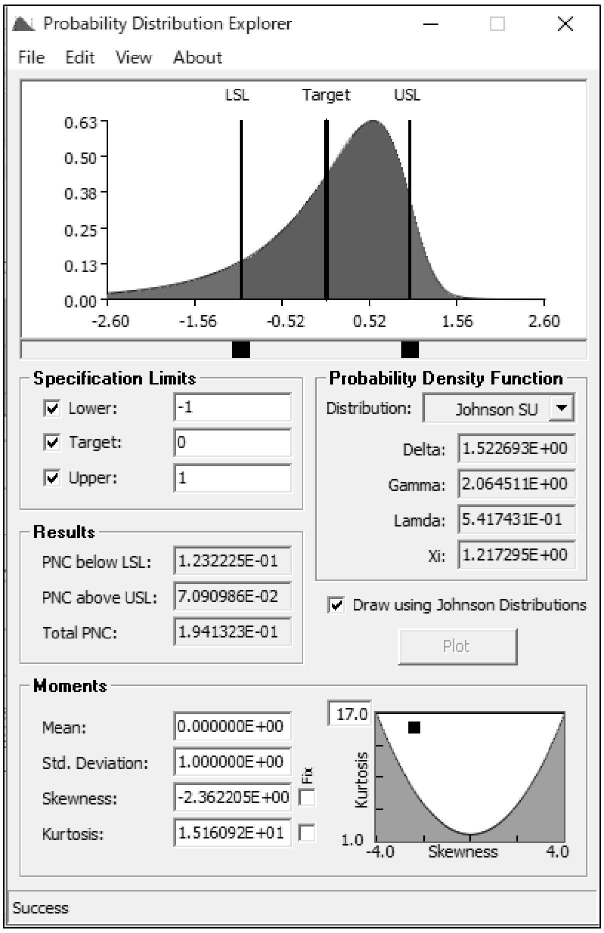


図 5　ジョンソン分布による描画例

5　おわりに

物理現象のバラツキをコントロールするためには，バラツキを定量的に表現する必要があった．バラツキを確率分布で捉え，平均値，標準偏差，歪度，尖度のサンプルモーメントを計算し，確率密度関数で正しいバラツキの分布形状を定義することができる．その結果，設計仕様の値でモノを製造した場合に，上限値と下限値からどの程度外れるかの予測値を想定不良率で計算できるようになった．従来は困難であったバラツキのコントロールの手段を，簡易的なツールを介して設計者に提供できたと考える．

参考文献

1) Milton, J.S., Arnold, J.C., Introduction to Probability and Statistics - Principles and Applications for Engineering and the Computing Sciences, McGraw-Hill, 1995.
2) Hahn, G.J., Shapiro, S.S., Statistical Models in Engineering, John Wiley & Sons, 1967.
3) D'Agostino, R.B., Stephens, M.A. Eds., Goodness-of-Fit Techniques, Marcel Dekker, 1986
4) Johnson, N. L., Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation, Biometrika, 1949, Vol. 36, p. 148-176.